



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

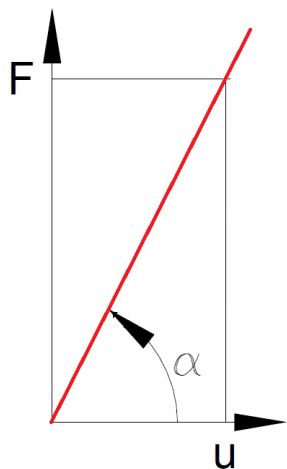


Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 4. Zagadnienia nieliniowe

10.2025

LINIOWY MODEL MES ZACHOWANIA STRUKTURY ODKSZTAŁCALNEJ



$$[K]\{q\} = \{F\} \Rightarrow \{q\} = [K]^{-1} \{F\}$$

Jeśli obciążenie da się rozłożyć na składowe:

$$\{F_*\} = \alpha\{F_a\} + \beta\{F_b\}$$

to można użyć metodę superpozycji:

$$\{q_*\} = [K]^{-1}\{F_*\}, \Rightarrow \{q_*\} = [K]^{-1}(\alpha\{F_a\} + \beta\{F_b\}) = \alpha[K]^{-1}\{F_a\} + \beta[K]^{-1}\{F_b\}$$

i wtedy rozwiązanie końcowe jest sumą rozwiązań składowych:

$$\{q_*\} = \alpha\{q_a\} + \beta\{q_b\}$$

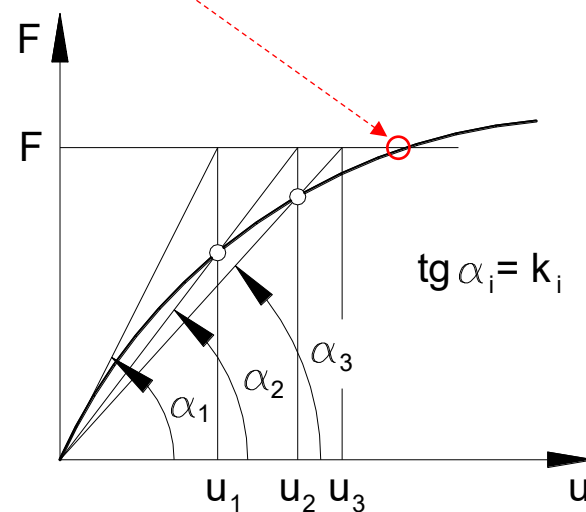
Nieliniowości strukturalne powodują, że odpowiedź konstrukcji zmienia się nieproporcjonalnie do przyłożonych sił. Realistycznie rzecz biorąc, prawie wszystkie konstrukcje są nieliniowe z natury, ale nie zawsze w takim stopniu, że nieliniowości te mają znaczący wpływ na analizę.

NIELINIOWY MODEL MES ZACHOWANIA STRUKTURY ODKSZTAŁCALNEJ

W analizie nieliniowej **macierz sztywności konstrukcji** i **wektor obciążenia** mogą zależeć od rozwiązania i dlatego są nieznane.

Aby rozwiązać problem, program używa procedury iteracyjnej, w której szereg przybliżeń liniowych zbiega się do **rzeczywistego rozwiązania nieliniowego**.

$$[K(\{q\})]\{q\} = \{F(\{q\})\}$$



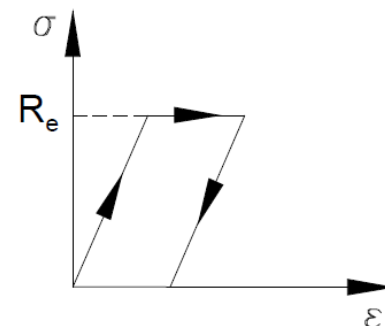
- Czy rozwiązanie istnieje? Ile rozwiązań istnieje?
- Rozwiązanie czasochłonne
- Iteracyjny proces rozwiązania – problem konwergencji
- Wyniki obciążenia zależą od historii obciążenia

Przyczyny zachowania nieliniowego

Nieliniowości materiałowe - nieliniowe zależności σ - ϵ

Czynniki mogące wpływać na właściwości σ - ϵ materiału:

- historia obciążenia (jak w przypadku odpowiedzi sprężysto-plastycznej),
- warunki środowiskowe (np. temperatura)
- czas w którym obciążenie działa (jak w przypadku pełzania).



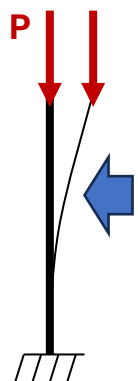
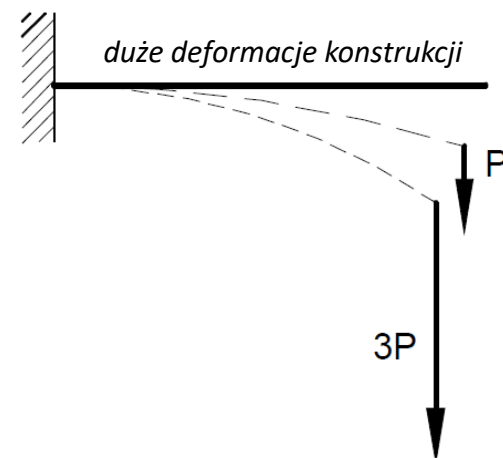
prosty sprężysto-plastyczny model zachowania się materiału

Nieliniowości geometryczne

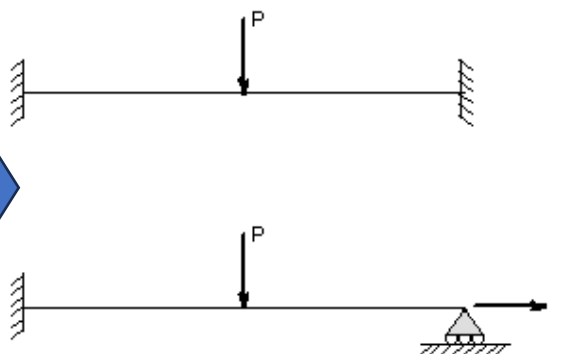
Jeśli struktura doświadcza dużych odkształceń, jej zmieniająca się konfiguracja geometryczna może spowodować, że struktura zareaguje nieliniowo.

Pod obciążeniami poprzecznymi belka jest bardzo elastyczna.

W miarę wzrostu siły P pręt ugina się tak bardzo, że ramię momentu zmniejsza się zauważalnie, powodując wzrost sztywności przy większych obciążeniach.

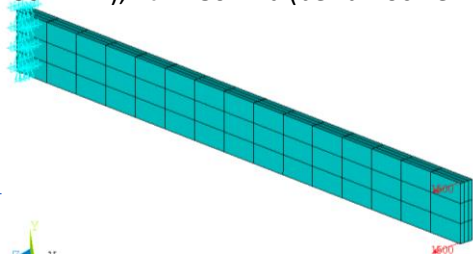
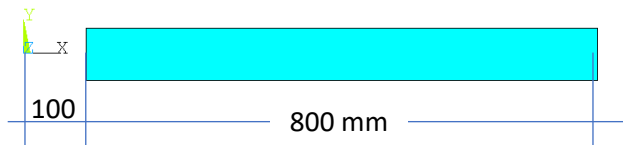


Siły osiowe mogą zwiększać lub zmniejszać sztywność belki w zależności od kierunku sił.



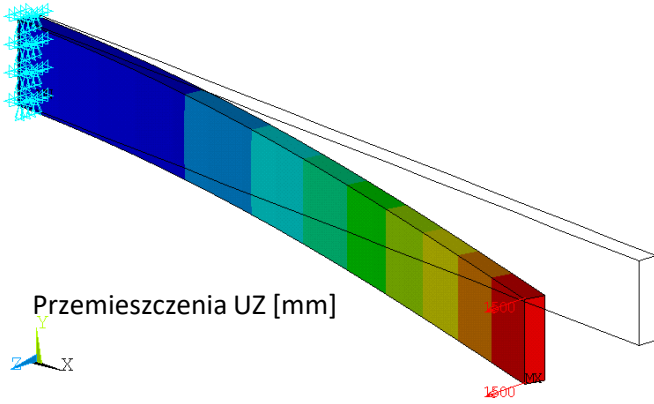
Nieliniowości materiałowe

Przykład 1 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm²), R₀₂=280MPa (bez umocnienia)
Obciążony siłą (FZ=3000 N)



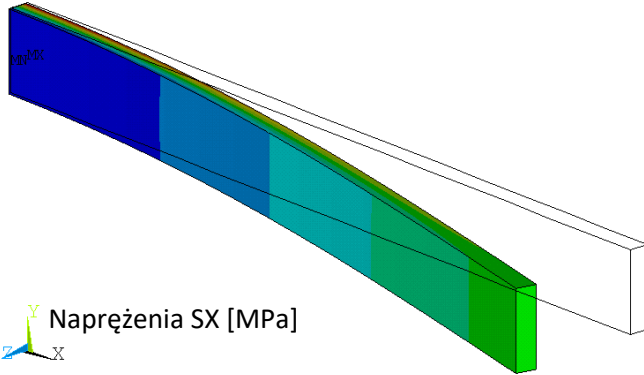
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =134.082
SMX =134.059
F

0
14.8954
29.7908
44.6862
59.5816
74.477
89.3724
104.268
119.163
134.059



Przemieszczenia UZ [mm]

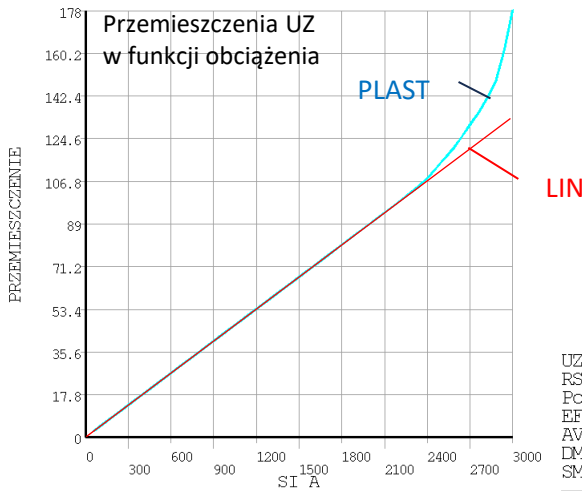
ANALIZA LINIOWA



Napężenia SX [MPa]

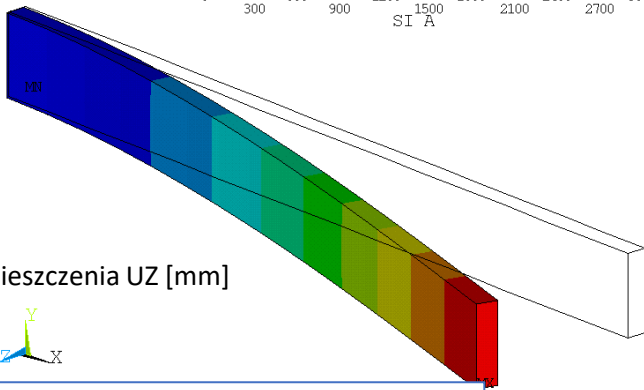
DMX =134.082
SMN =-428.113
SMX =428.113

-428.113
-332.977
-237.84
-142.704
-47.568
47.5681
142.704
237.84
332.977
428.113



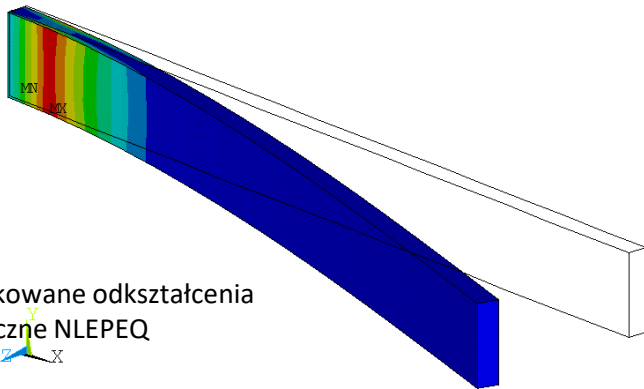
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =178.141
SMX =178.113

0
19.7903
39.5807
59.371
79.1613
98.9516
118.742
138.532
158.323
178.113



Przemieszczenia UZ [mm]

ANALIZA NIELINIOWA MATERIAŁOWO



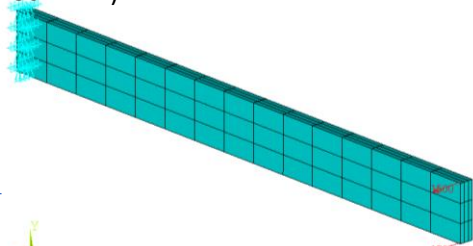
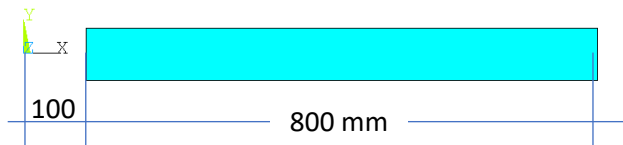
Zredukowane odkształcenia plastyczne NLEPEQ

AVRES=Mat
DMX =178.141
SMX =.006267

0
.696E-03
.001393
.002089
.002785
.003482
.004178
.004874
.005571
.006267

Nieliniowości geometryczne

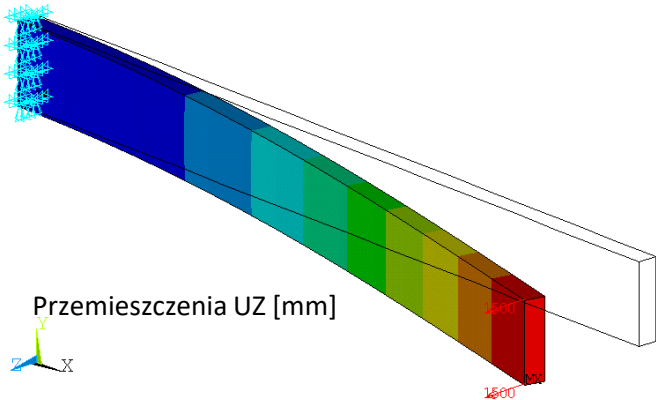
Przykład 2 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm²)
Obciążony siłą (FZ=3000 N)



UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =134.082
SMX =134.059

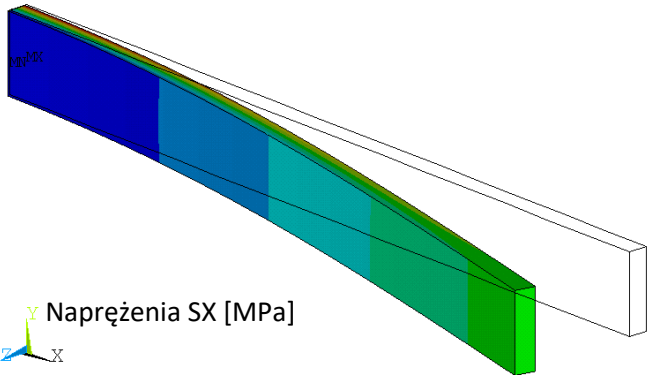
U
F

0
14.8954
29.7908
44.6862
59.5816
74.477
89.3724
104.268
119.163
134.059



Przemieszczenia UZ [mm]

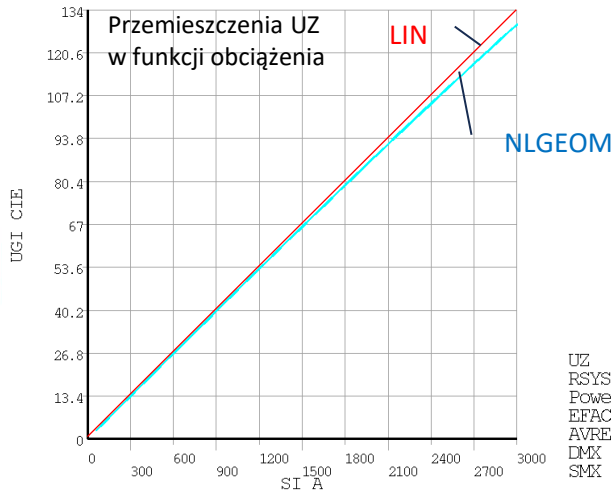
ANALIZA LINIOWA



Napężenia SX [MPa]

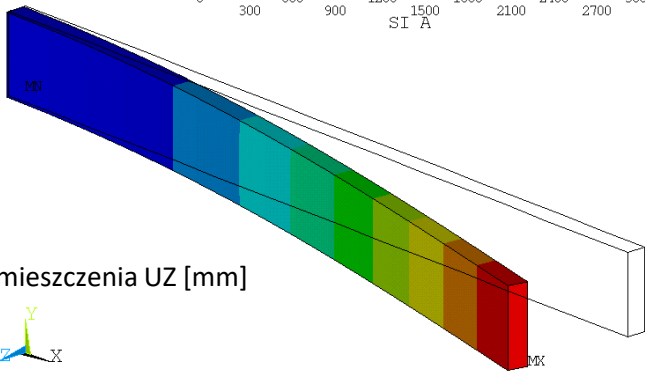
SMN =-428.113
SMX =428.113

-428.113
-332.977
-237.84
-142.704
-47.568
47.5681
142.704
237.84
332.977
428.113



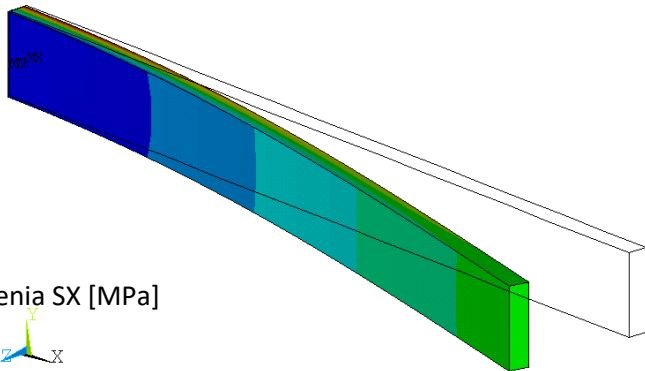
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =130.078
SMX =129.67

0
14.4077
28.8155
43.2232
57.631
72.0387
86.4465
100.854
115.262
129.67



Przemieszczenia UZ [mm]

ANALIZA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA



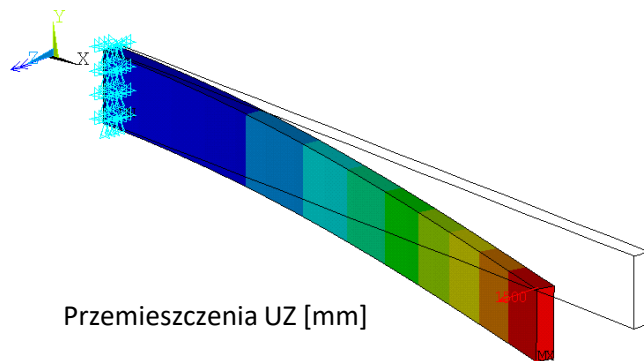
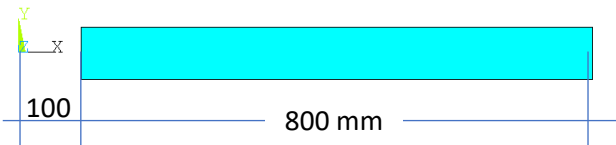
Napężenia SX [MPa]

SMN =-421.642
SMX =417.705

-421.642
-328.381
-235.12
-141.859
-48.5986
44.6622
137.923
231.184
324.445
417.705

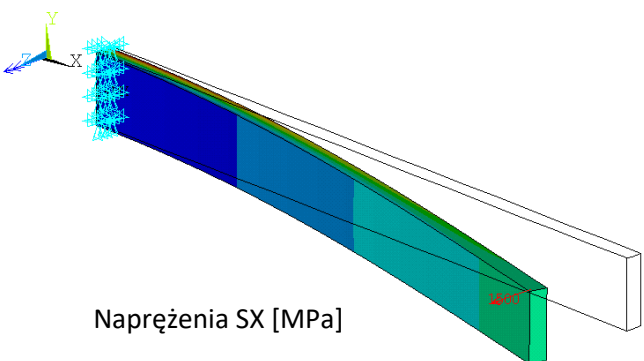
Nieliniowości geometryczne

Przykład 3 – duralowy płaskownik (A=20x80 mm²)
wirujący względem osi Z (n=3000 obr./min)
i obciążony siłą (FZ=3000 N)

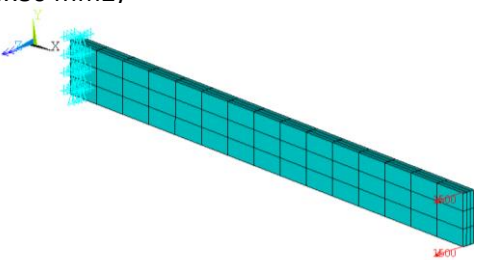


smiglo duralowe (n=3000 obr/min i FZ=3000N LINIOWE)

ANALIZA LINIOWA

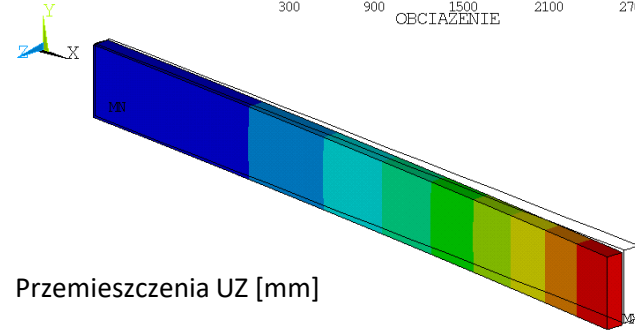


smiglo duralowe (n=3000 obr/min i FZ=3000N LINIOWE)



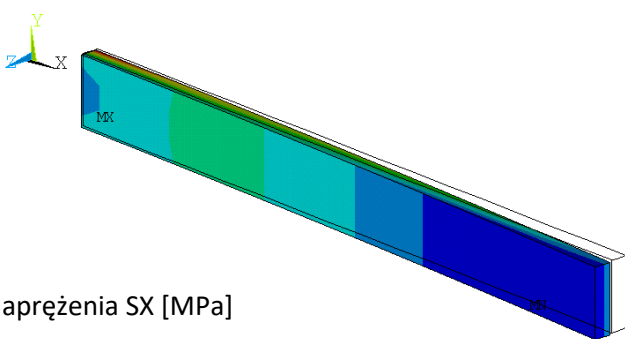
smiglo duralowe (n=3000 obr/min i FZ=3000N Niel geom)

- DMX =134.098
- SMX =134.058
- U
- OMEG
- 0
- 14.8954
- 29.7907
- 44.6861
- 59.5815
- 74.4769
- 89.3722
- 104.268
- 119.163
- 134.058

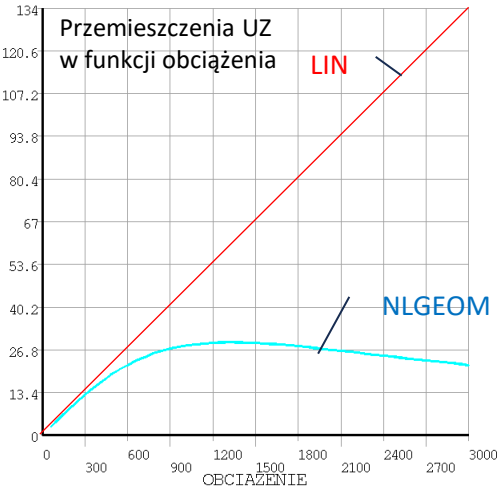


smiglo duralowe (n=3000 obr/min i FZ=3000N Niel geom)

ANALIZA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA



smiglo duralowe (n=3000 obr/min i FZ=3000N Niel geom)

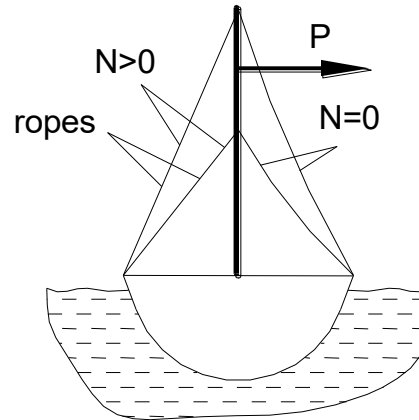
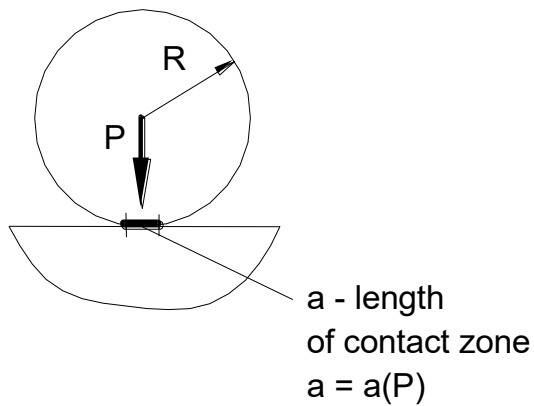


- TIME=3000
- UZ (AVG)
- RSYS=0
- PowerGraphics
- EFACET=1
- AVRES=Mat
- DMX =22.1169
- SMX =22.0984
- 0
- 2.45537
- 4.91075
- 7.36612
- 9.82149
- 12.2769
- 14.7322
- 17.1876
- 19.643
- 22.0984

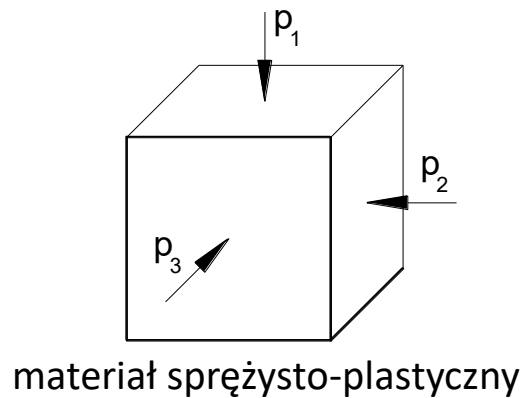
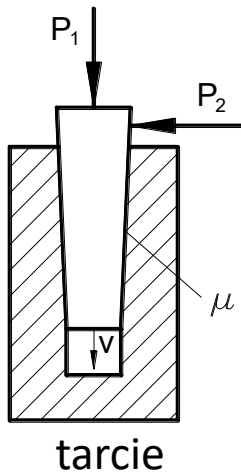
- EFACET=1*
- AVRES=Mat
- DMX =22.1169
- SMN =-13.9112
- SMX =193.588
- 13.9112
- 9.14428
- 32.1997
- 55.2551
- 78.3106
- 101.366
- 124.421
- 147.477
- 170.532
- 193.588

Przyczyny zachowania nieliniowego (c.d.)

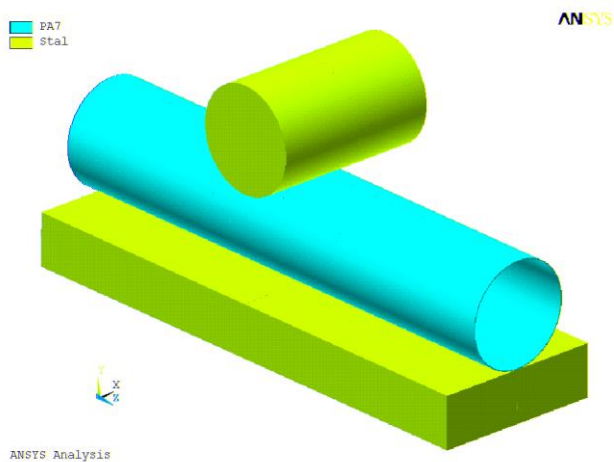
Tarcie, oddziaływanie kontaktowe, przerwy (gaps), liny



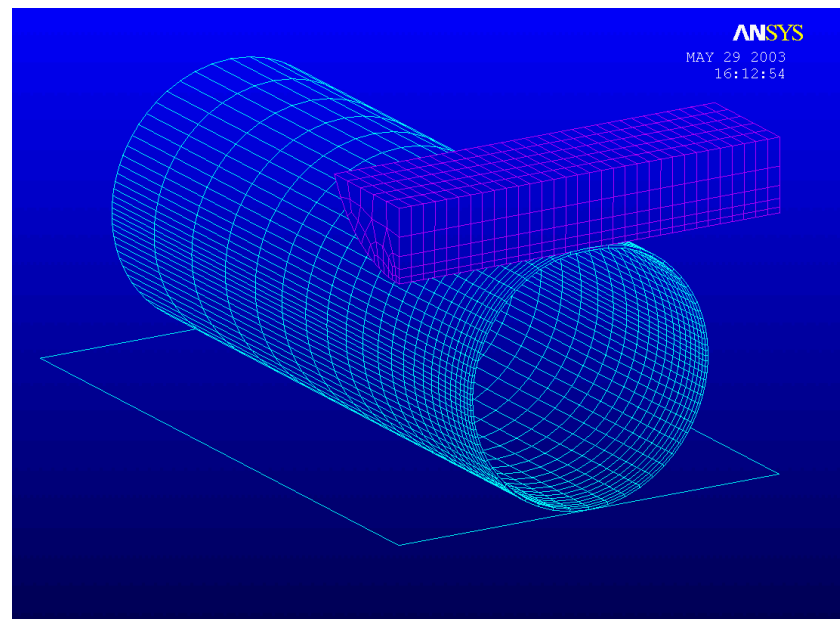
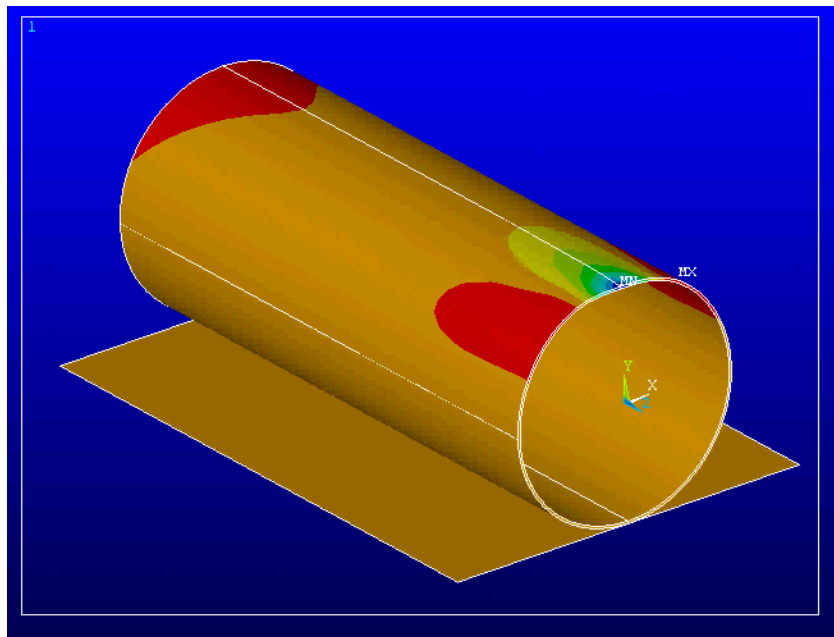
Znaczenie historii obciążenia dla wyniku końcowego obciążenia



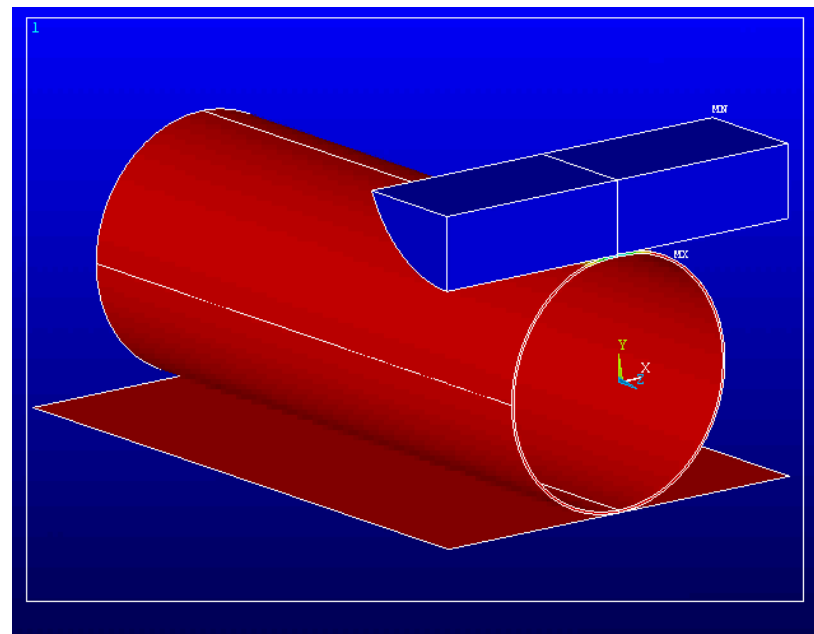
Test 1: zderzenie walca z rurą



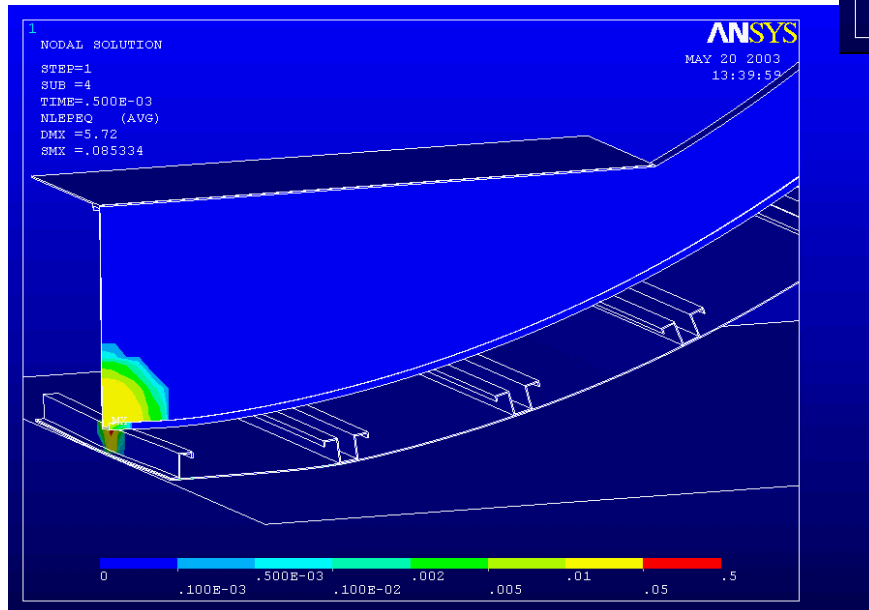
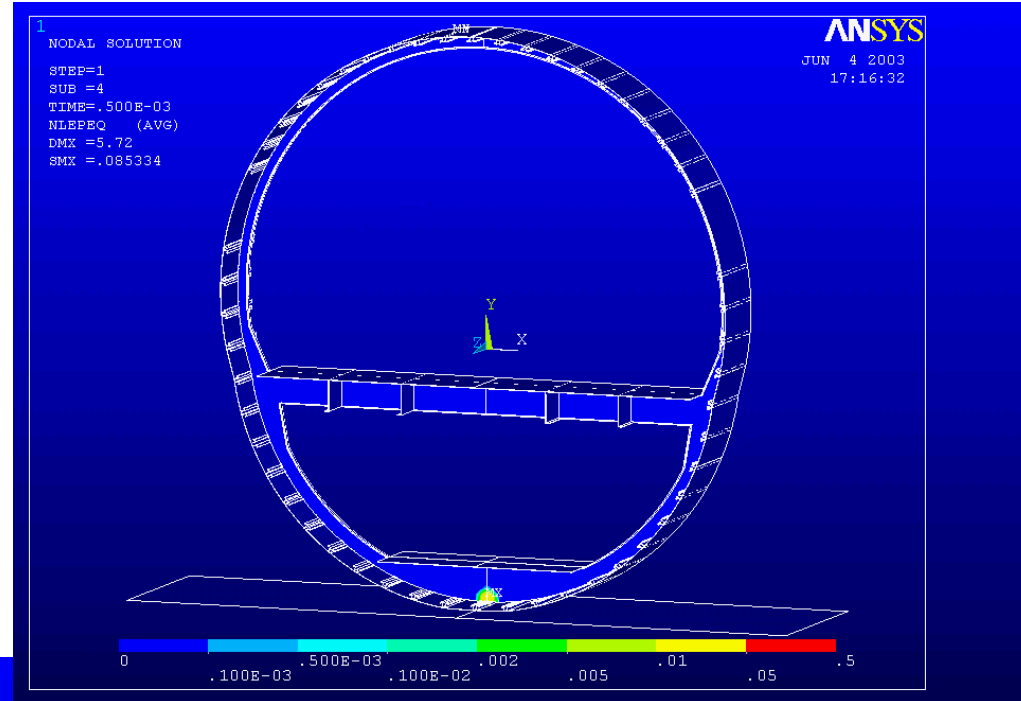
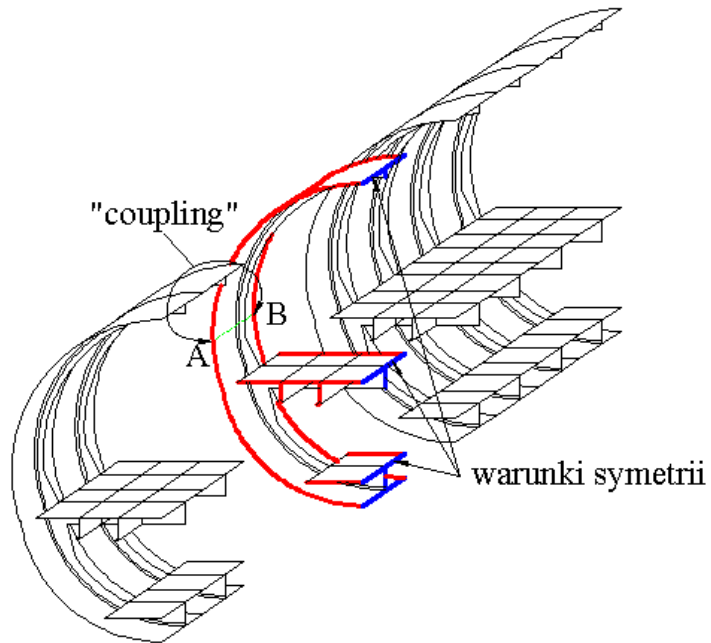
Zgniatanie quasistatyczne:



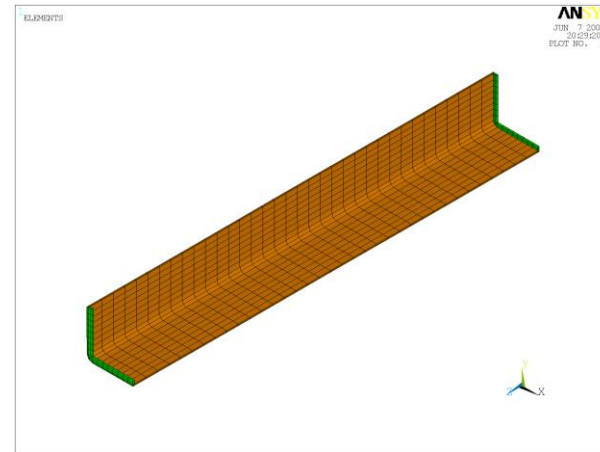
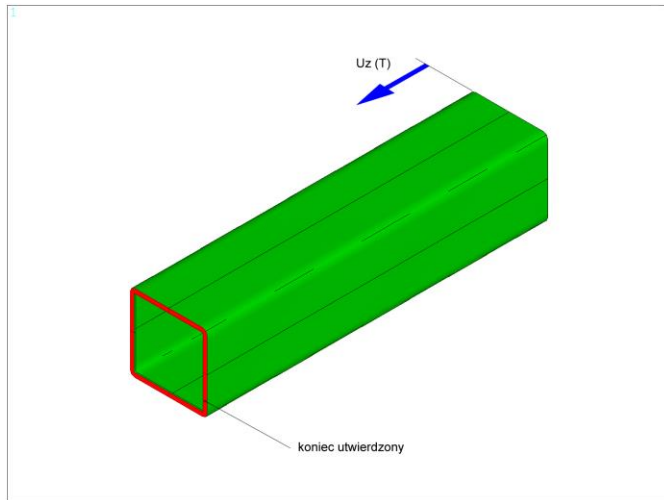
Zderzenie (pełna dynamika)



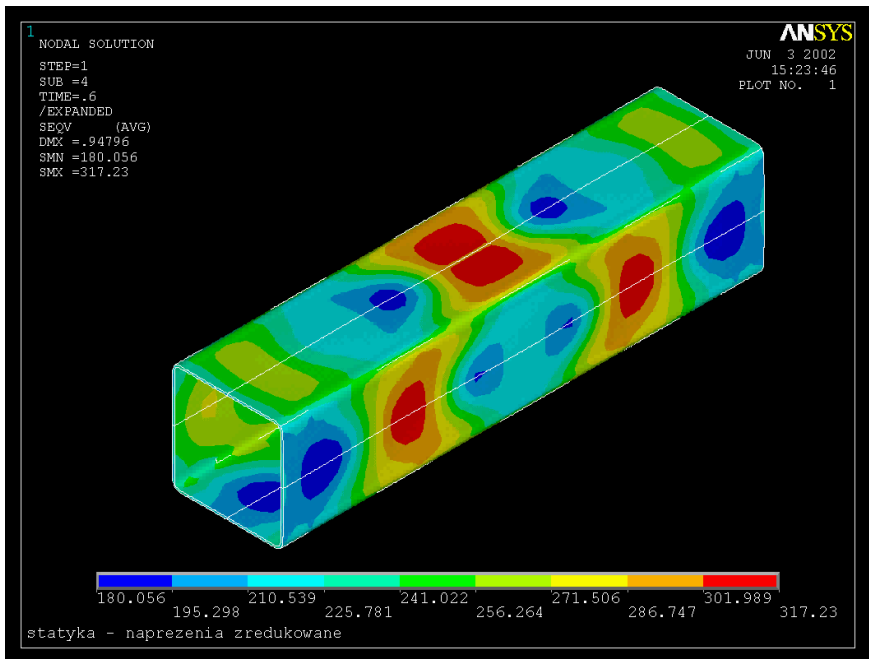
Test 2. Zderzenie sekcji kadłuba samolotu Boeing 737-200



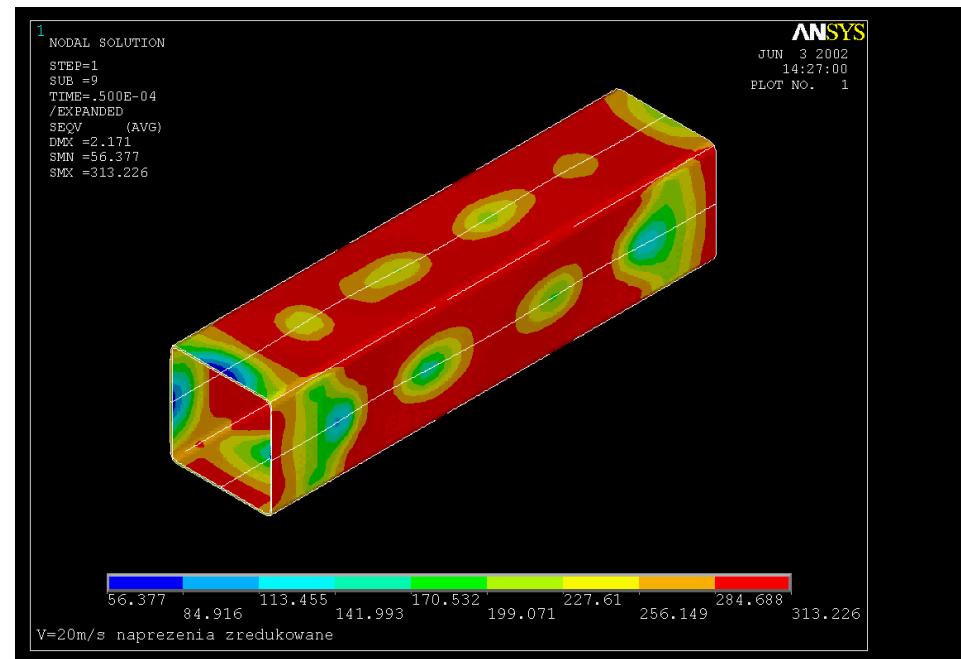
Test 3. Analiza utraty stateczności ściskanego osiowo elementu cienkościnnego o przekroju zamkniętym



Model MES



1) Analiza pod obciążeniem statycznym zmiennym w czasie, zadany przemieszczeniowo



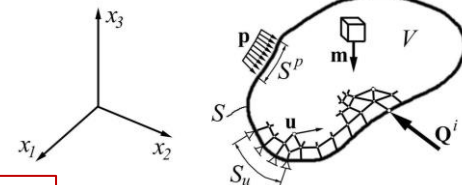
2) Analiza dynamiczna, po uderzeniu nieskończenie dużą masą o ustalonej prędkości (nieskończenie duża energia uderzenia).

Opis ciała odkształcalnego o nieliniowych właściwościach

Wektory składowych stanu odkształcenia i naprężenia

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}],$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}].$$



Związki kinematyczne pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami otrzymuje się przez analizę zmian wymiarów elementarnego fragmentu ciała, a następnie uzyskane wyrażenie rozwija się w szereg Taylora:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{\alpha,i}u_{\alpha,j}), \quad \text{gdzie indeksy po przecinkach oznaczają różniczkowanie po składowych } i, j, \alpha = 1, 2, 3.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,1})^2 \\ \frac{1}{2}(u_{1,2})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,2})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,2})^2 \\ \frac{1}{2}(u_{1,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{2,3})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,3})^2 \\ u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2} \\ u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3} \\ u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_1(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \boldsymbol{\varepsilon}^L + \boldsymbol{\varepsilon}^{NL},$$

gdzie pochodne macierzy funkcji kształtu:

$$\mathbf{N}_{i,j}^T = \left[\frac{\partial n_{i1}}{\partial x_j}, \frac{\partial n_{i2}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial n_{iL}}{\partial x_j} \right]$$

$$\mathbf{N}_{,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_{11}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{12}}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial n_{1L}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial n_{21}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{22}}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial n_{2L}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial n_{31}}{\partial x_j} & \frac{\partial n_{32}}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial n_{3L}}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{1\bullet,1}^T \\ \mathbf{N}_{2\bullet,2}^T \\ \mathbf{N}_{3\bullet,3}^T \\ \mathbf{N}_{1\bullet,2}^T + \mathbf{N}_{2\bullet,1}^T \\ \mathbf{N}_{2\bullet,3}^T + \mathbf{N}_{3\bullet,2}^T \\ \mathbf{N}_{1\bullet,3}^T + \mathbf{N}_{3\bullet,1}^T \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{N}_{,1}^T \mathbf{N}_{,1} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{N}_{,2}^T \mathbf{N}_{,2} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{N}_{,3}^T \mathbf{N}_{,3} \\ \mathbf{q}^T (\mathbf{N}_{,1}^T \mathbf{N}_{,2} + \mathbf{N}_{,2}^T \mathbf{N}_{,1}) \\ \mathbf{q}^T (\mathbf{N}_{,2}^T \mathbf{N}_{,3} + \mathbf{N}_{,3}^T \mathbf{N}_{,2}) \\ \mathbf{q}^T (\mathbf{N}_{,1}^T \mathbf{N}_{,3} + \mathbf{N}_{,3}^T \mathbf{N}_{,1}) \end{Bmatrix},$$

Liniowa składowa odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ jest iloczynem macierzy $\mathbf{B}_0$ i wektora parametrów węzłowych $\mathbf{q}$.

Macierz $\mathbf{B}_0$ zależy wyłącznie od funkcji kształtu.

Nieliniowa składowa odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$ jest iloczynem macierzy $\mathbf{B}_1$ i wektora parametrów węzłowych $\mathbf{q}$.

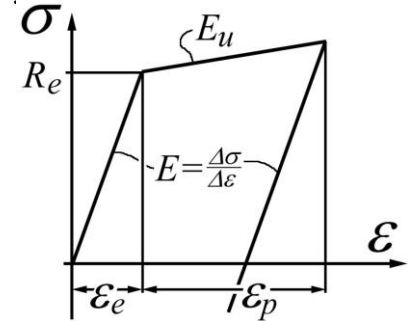
Nieliniowość wywołana plastycznością

Zależność pomiędzy składowymi wektora składowych stanu naprężenia σ , a składowymi wektora odkształcenia sprężystego ϵ_e można zapisać na podstawie prawa Hooke'a przy pomocy macierzy konstytutywnej $\mathbf{D}$, która zawiera właściwości sprężyste materiału (E i ν): $\sigma = \mathbf{D}\epsilon_e$.

Zależność $\sigma = f(\epsilon)$ dotyczącą materiału o właściwościach sprężysto-plastycznych z umocnieniem dla jednoosiowego stanu naprężenia $\rightarrow$

Odształcenie całkowite ϵ :

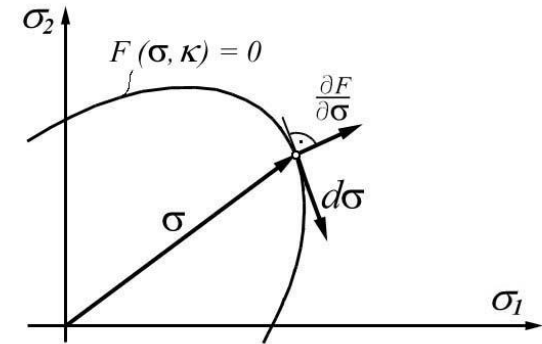
$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p.$$



Poza zakresem sprężystym przyrost odkształceń plastycznych $d\epsilon_p$ wyznacza się np. z **prawa płynięcia** jako iloczyn skalarnego mnożnika $d\lambda$ i pochodnej potencjału plastycznego Q względem wektora składowych stanu naprężenia:

$$d\epsilon_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}.$$

Jeśli potencjał Q zastąpi się **funkcją plastyczności** $F(\sigma, \kappa)$, zależność przyjmie postać stowarzyszonego prawa płynięcia (z odpowiednim warunkiem plastyczności). Współczynnik κ oznacza pracę plastyczną zsumowaną dla całej historii obciążenia, związaną z izotropowym umocnieniem materiału. Korzystając z hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego warunek plastyczności zapisuje się w postaci:



$$F = \sigma_{redHMH} - R_e(\kappa) = 0,$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)} - R_e(\kappa) = 0.$$

Po przekształceniach mamy:

$$d\sigma = \mathbf{D}(d\epsilon - d\epsilon_p) = \left\{ \mathbf{D} - \mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma^T} \mathbf{D} \left(E_u + \frac{\partial F}{\partial \sigma^T} \mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^{-1} \right\} d\epsilon = \mathbf{D}^* d\epsilon.$$

przyrost naprężenia

macierz sprężysto-plastyczna

Jeśli w ustroju nie występują odkształcenia plastyczne macierz $\mathbf{D}^*$ jest równa macierzy konstytutywnej $\mathbf{D}$

Zasada prac przygotowanych

Równania równowagi ciała przedstawionego na rysunku można uzyskać z zasady prac przygotowanych, pamiętając, że praca przygotowana reakcji sztywnych więzów jest równa zero:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{S_p} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} dV - \sum_{i=1}^m \mathbf{Q}^i \delta \mathbf{u}_i - \int_V \mathbf{m}^T \delta \mathbf{u} dV = 0$$

Siły masowe $\mathbf{m}$ wyznacza się z iloczynu gęstości i przyspieszeń $\ddot{\mathbf{u}}(t)$:

$$\mathbf{m} = -\rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}}.$$

Uogólnione przemieszczenie przygotowane $\delta \mathbf{u}$ wyznacza się jako iloczyn macierzy funkcji kształtu i przemieszczenia przygotowanego parametrów węzłowych:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q}.$$

Przemieszczenia przygotowane odkształceń $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ wyznacza się wykorzystując liniowość macierzy $\mathbf{B}_1$ względem wektorów $\mathbf{q}$ i $\delta \mathbf{q}$:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_1(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_1(\delta \mathbf{q}) \mathbf{q} = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{q})) \delta \mathbf{q}.$$

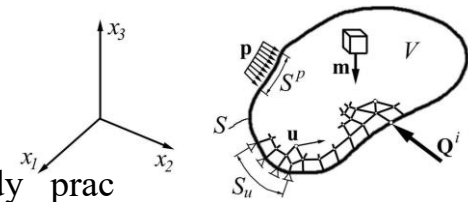
Korzystając z powyższych zależności oraz przemienności iloczynu skalarnego wektorów zasadę prac przygotowanych da się przedstawić w następujący sposób:

$$\int_V \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T) \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_p} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV - \sum_{i=1}^m \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i + \int_V \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV = 0.$$

Zapisując powyższe równanie po umieszczeniu wariacji $\delta \mathbf{q}$ przed znakami całek i sumy otrzymamy:

$$\delta \mathbf{q}^T \left(\int_V (\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T) \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_p} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV - \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i + \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV \right) = 0,$$

Ponieważ przemieszczenia przygotowane $\delta \mathbf{q}$ są dowolne i różne od zera, spełnienie tego równania wymaga zerowania się wyrażenia w nawiasie.



Grupując poszczególne wyrazy w **wektor sił wewnętrznych** $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ i **wektor obciążeń zewnętrznych** $\mathbf{R}^0$ niezależny od parametrów węzłowych, uzyskuje się następujący układ równań nieliniowych:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{R}^0 = \mathbf{0}, \quad (*)$$

w którym:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \int_V (\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T) \boldsymbol{\sigma} dV,$$

$$\mathbf{R}^0 = \int_{S_p} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV + \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i - \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV.$$

W zagadnieniach dynamicznych z tłumieniem zależność powyższą uzupełnia się o macierz tłumienia $\mathbf{C}$, proporcjonalną do prędkości $d\mathbf{q}/dt$. Pełne równanie ruchu ciała przyjmuje wtedy następującą postać:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{P}(t), \quad (**)$$

w którym: $\mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$, $\mathbf{P}(t) = \int_{S_p} \mathbf{N}^T \mathbf{p}(t) dV + \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q}^i(t)$, $\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$.

Macierz $\mathbf{M}$ jest macierzą masową, wektor $\mathbf{P}(t)$ zawiera obciążenia zależne od czasu, natomiast $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ jest nieliniową macierzą sztywności, zależną od przemieszczeń węzłowych.

Układ równań (*) rozwiązuje się metodami iteracyjnymi, np. **metodą Newtona-Raphsona**, która polega na linearyzacji przyrostu wektora $\mathbf{R}$ wokół położenia $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, uzyskiwanej przez rozwinięcie wyrażenia (*) w szereg Taylora, łącznie z wyrazem zawierającym pierwszą pochodną:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}$$

Pochodna wektora $\mathbf{R}$ względem wektora $\mathbf{q}$ oznaczana jest często jako **macierz styczna** $\mathbf{K}_T$. Przy różniczkowaniu należy uwzględnić wzór $\mathbf{D}^* = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_1^T, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{D}^* \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Po uwzględnieniu powyższych związków **macierz styczna** $\mathbf{K}_T$ może być przedstawiona jako suma trzech macierzy:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \int_V \frac{\partial (\mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV + \int_V \frac{\partial (\mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_L, \quad (***)$$

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \int_V \frac{\partial (\mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV + \int_V \frac{\partial (\mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{q}} dV = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_L, \quad (***)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_0^T dV - \text{początkowa macierz sztywności},$$

$$\mathbf{K}_G = \int_V [\mathbf{N}_{,1}^T \quad \mathbf{N}_{,2}^T \quad \mathbf{N}_{,3}^T] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{,1} \\ \mathbf{N}_{,2} \\ \mathbf{N}_{,3} \end{Bmatrix} dV$$

– geometryczna macierz sztywności (wynikająca ze stanu naprężenia),

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_1^T dV + \int_V \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_0^T dV + \int_V \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_1^T dV - \text{macierz dużych przemieszczeń}.$$

Dla liniowej statyki, przy małych przemieszczeniach i wyeliminowaniu członów zależnych od czasu otrzymujemy następującą postać:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{P} - \text{wektor stałych obciążeń zewnętrznych}.$$

W przypadku nieliniowej statyki, związanej z uwzględnieniem dużych przemieszczeń oraz wpływu naprężeń na sztywność ciała, układ równań (**) przyjmuje postać, w której macierz sztywności zależy od parametrów węzłowych:

$$K(q)q = P, \quad K_T = K_0 + K_G + K_L,$$

gdzie: K_T – macierz styczna, otrzymywana z zależności (***)

Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona

Rozwiązanie układu równań nieliniowych w postaci (*) metodą Newtona-Raphsona polega na wielokrotnym rozwiązaniu zadania liniowego uzyskanego po linearyzacji wektora obciążeń wewnętrznych $R(q)$.

W położeniu wyjściowym znany jest wektor q_0 oraz wektor obciążeń zewnętrznych R^0 . W pierwszej iteracji indeks $i = 0$.

Przebieg dojścia do rozwiązania jest następujący:

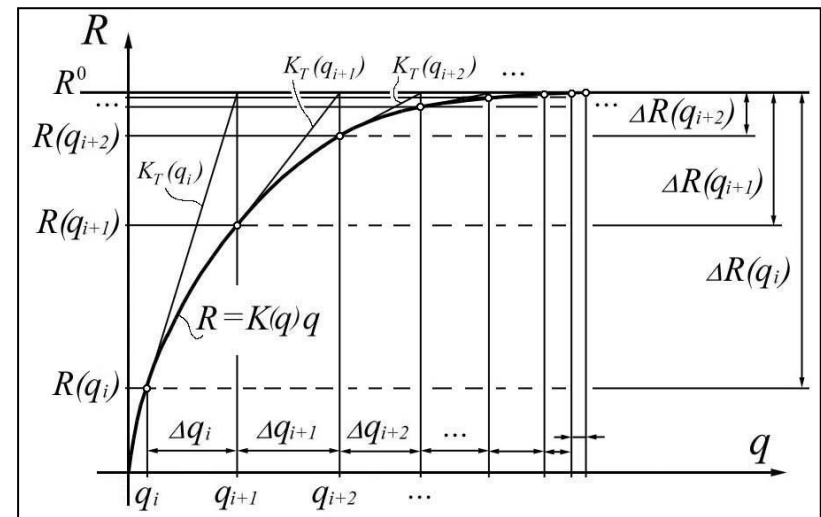
1. Wyznaczenie wektora $R(q_i)$,
2. Wyznaczenie wektora residuum: $\Delta R(q_i) = R^0 - R(q_i)$,
3. Wyznaczenie macierzy stycznej $K_T(q_i)$,
4. Wyznaczenia odwróconej macierzy stycznej $[K_T(q_i)]^{-1}$,
5. Znalezienie przyrostu: $\Delta q_i = [K_T(q_i)]^{-1} \Delta R(q_i)$,
6. Wyznaczenie wektora parametrów węzłowych: $\Delta q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$,
7. Wyznaczenie normy (zwykle euklidesowej) wektorów Δq_i i $\Delta R(q_i)$,
8. Sprawdzenie kryterium zbieżności,
9. Zwiększenie indeksu: $i = i + 1$ i powtórzenie kroków od 1 do 9.

Iteracje są wykonywane dotąd, aż zostaną spełnione kryteria zbieżności:

- a) przemieszczeniowe $\|\Delta q_i\|_2 < \varepsilon_q \|\mathbf{q}_{ref}\|_2$
- b) siłowe $\|\Delta R(q_i)\|_2 < \varepsilon_R \|\mathbf{R}_{ref}\|_2$

Wielkości ε_q i ε_R są tolerancjami, które z reguły przyjmuje się na poziomie około 0,1% wartości norm wektorów odniesienia $\mathbf{q}_{ref}$ i $\mathbf{R}_{ref}$. Wektorem odniesienia w przypadku przemieszczeń jest najczęściej aktualny stan q_i , natomiast w przypadku kryterium siłowego za wektor odniesienia przyjmuje się wartość obciążenia R^0 z danego podkroku.

W metodzie elementów skończonych lepszą zbieżność uzyskuje się zwykle dla kryterium przemieszczeniowego.

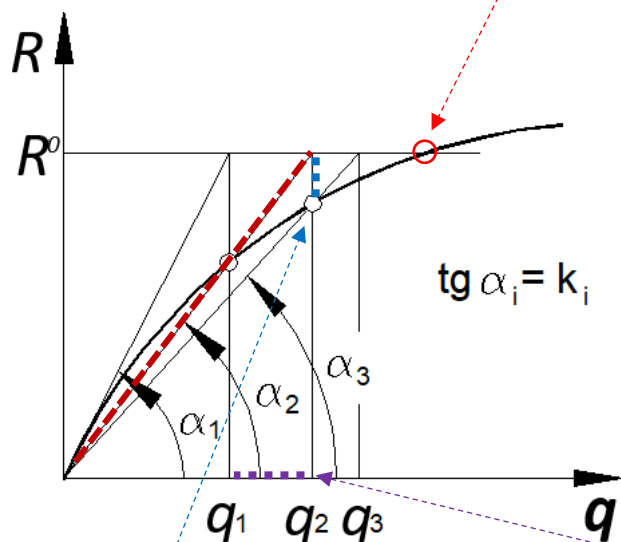


Iteracyjne rozwiązanie układu nieliniowych równań metodą iteracji bezpośrednich

Seria przybliżonych rozwiązań (iteracje): $\{q\}_0, \{q\}_1, \{q\}_2, \dots, \{q\}_n$

zbieżność do **dokładnego rozwiązania**

Wektor $\{q\}_i$ oblicza się na podstawie poprzedniego rozwiązania $\{q\}_{i-1}$



$$[K(\{q\}_{i-1})]\{q\}_i = \{R\}$$

$\{q\}_0$ – dowolne rozwiązanie początkowe ($=0$),

$[K]_i = [K(\{q\}_i)]$ – poprawiona macierz sztywności

Kryteria zbieżności:

Zbieżność przyrostu DOF

$$\{\Delta q\}_i = \{q\}_i - \{q\}_{i-1}$$

$$\|\{\Delta q\}_i\| \leq \delta$$

Konwergencja niezrównoważona (wektor resztkowy)

$$\{\Delta R\}_{i+1} = \{R\} - [K]_i \{q\}_i$$

$$\|\{\Delta R\}_i\| \leq \varepsilon$$

δ, ε - wartości odniesienia

Normy:
 $\|\{x\}\| = (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
 $\|\{x\}\| = \max x_i$

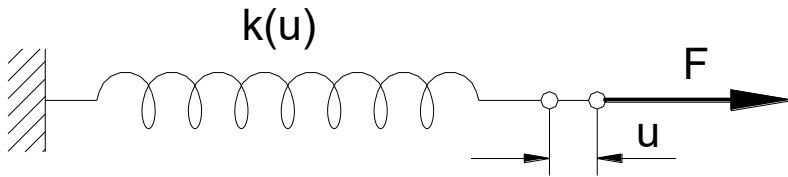
Kryteria dotyczące
błędów względnych

$$\frac{\|\{\Delta q\}_i\|}{\|\{q\}_i\|} \leq \varepsilon$$

$$\frac{\|\{\Delta R\}_i\|}{\|\{R\}\|} \leq \delta$$

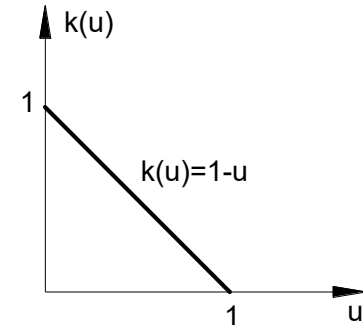
Techniki Iteracyjnego rozwiązania układu nieliniowych równań

Przykład 4: Znajdź przemieszczenie u dla sprężyny nieliniowej



$$k(u) = 1 - u$$

$$F_a = 0.2$$

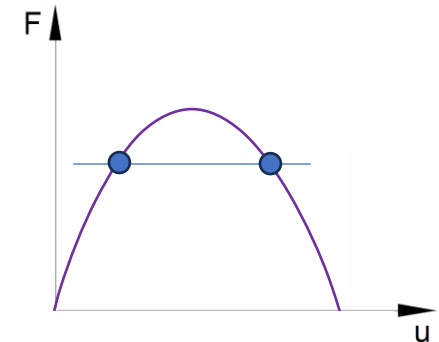


Rozwiązanie analityczne:

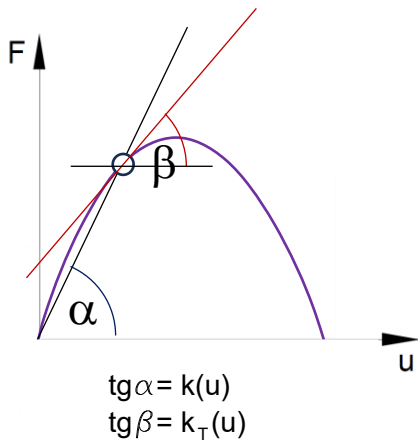
$$k(u)u = F$$

$$u^2 - u + F = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4F}}{2} = 0.2734, \\ u_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F}}{2} = 0.7236. \end{cases}$$



Rozwiązanie numeryczne:



sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d}{du}(k(u)u) = \frac{dk}{du}u + k = 1 - 2u$$

Metoda iteracji bezpośrednich

$$\{q\}_i = [K]_{i-1}^{-1}\{F\}$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0$

Iteracja 1: $u_1 = \frac{F_a}{k(u_0)}$

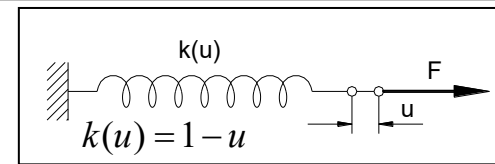
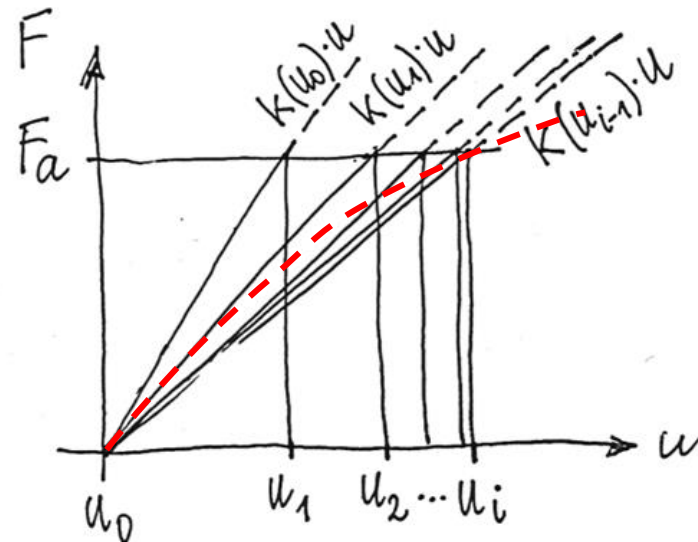
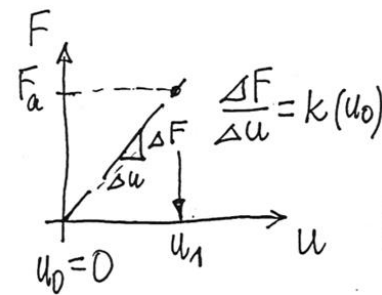
Iteracja „i”: $u_i = \frac{F_a}{k(u_{i-1})}$

Przyrost przemieszczenia:

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$$

Kryterium zbieżności:

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon$$



i	$u_i = \frac{F_a}{k(u_{i-1})}$	$k_i = 1 - u_i$	$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$
1	$0.2/1 = \mathbf{0.2}$	$1-0.2 = \mathbf{0.8}$	$0.2-0 = \mathbf{0.2}$	$\mathbf{1}$
2	$0.2/0.8 = \mathbf{0.25}$	$1-0.25 = \mathbf{0.75}$	$0.25-0.2 = \mathbf{0.05}$	$\mathbf{0.25}$
3	$0.2/0.75 = \mathbf{0.2667}$	$1-0.2667 = \mathbf{0.7333}$	$0.2667-0.25 = \mathbf{0.017}$	$\mathbf{0.064}$
4	$0.2/0.7333 = \mathbf{0.2727}$	$1-0.2727 = \mathbf{0.7273}$	$0.2727-0.2666 = \mathbf{0.006}$	$\mathbf{0.022}$
5	$0.2/0.7273 = \mathbf{0.2750}$	$1-0.275 = \mathbf{0.725}$	$0.275-0.2727 = \mathbf{0.0023}$	$\mathbf{0.0084}$
6	$0.2/0.725 = \mathbf{0.2759}$	$1-0.2759 = \mathbf{0.7241}$	$0.2759-0.275 = \mathbf{0.0009}$	$\mathbf{0.0032}$

Metoda przyrostowa

Obliczenia dotyczą przyrostów wektora niewiadomych $\{q\}_i$

$$\{R\}_i = \{F\} - [K]_{i-1}\{q\}_{i-1}$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1:

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k(u_0)}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

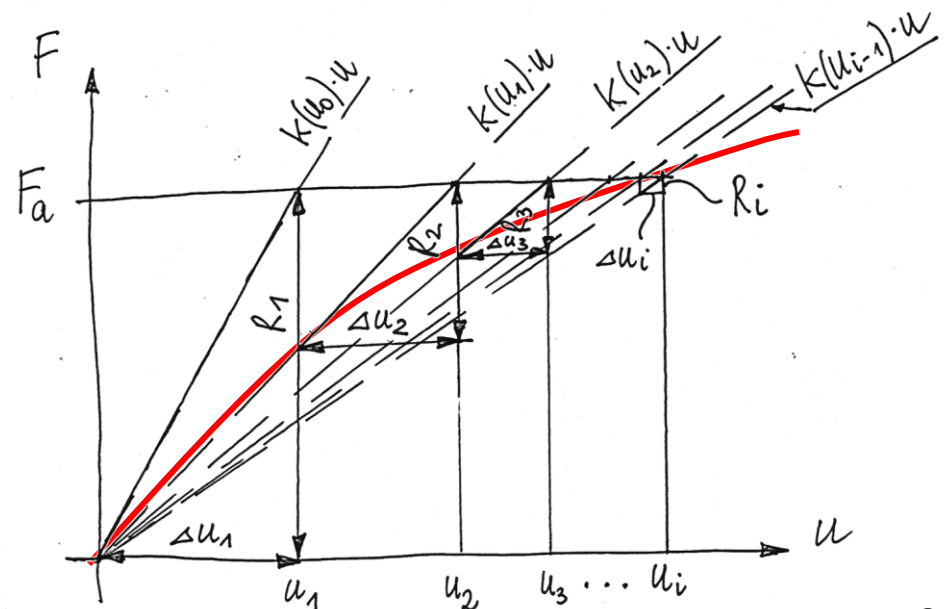
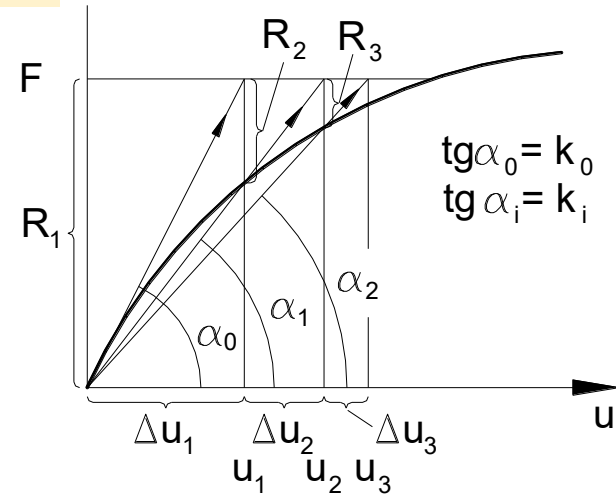
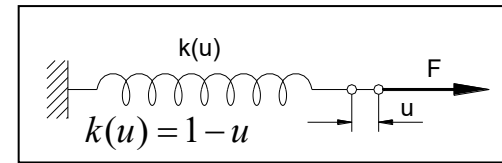
Iteracja „i”: $R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k(u_{i-1})}$$

$$u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$

Kryteria zbieżności:

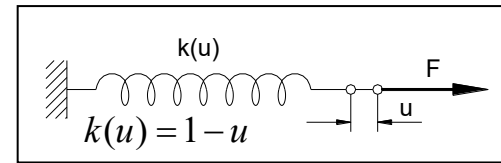
$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$



Metoda przyrostowa

Obliczenia dotyczą przyrostów wektora niewiadomych $\{q\}_i$

$$\{R\}_i = \{F\} - [K]_{i-1}\{q\}_{i-1}$$



Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1:

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k(u_0)}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”:

$$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k(u_{i-1})}$$

$$u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{i-1}}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.05	0.25	0.2	0.2
3	0.25	0.75	0.0125	0.0167	0.2667	0.063	0.063
4	0.2667	0.733	0.0044	0.006	0.2727	0.022	0.022
5	0.2727	0.7273	0.0017	0.0023	0.2750	0.008	0.0085

Kryteria zbieżności:

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$

Metoda Newtona-Raphsona

W każdej iteracji w obliczeniach liniowego układu równań używana jest macierz styczna

$$[K]_T = \frac{d\{F\}}{d\{q\}} = [K] + \frac{d[K]}{d\{q\}}\{q\}$$

Sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d(k(u) \cdot u)}{du} = \frac{d(k(u))}{du} \cdot u + \frac{du}{du} \cdot k(u) = -u + 1 - u = 1 - 2 \cdot u$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1: $k_{T1} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_0} = 1 - 2 \cdot u_0$

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

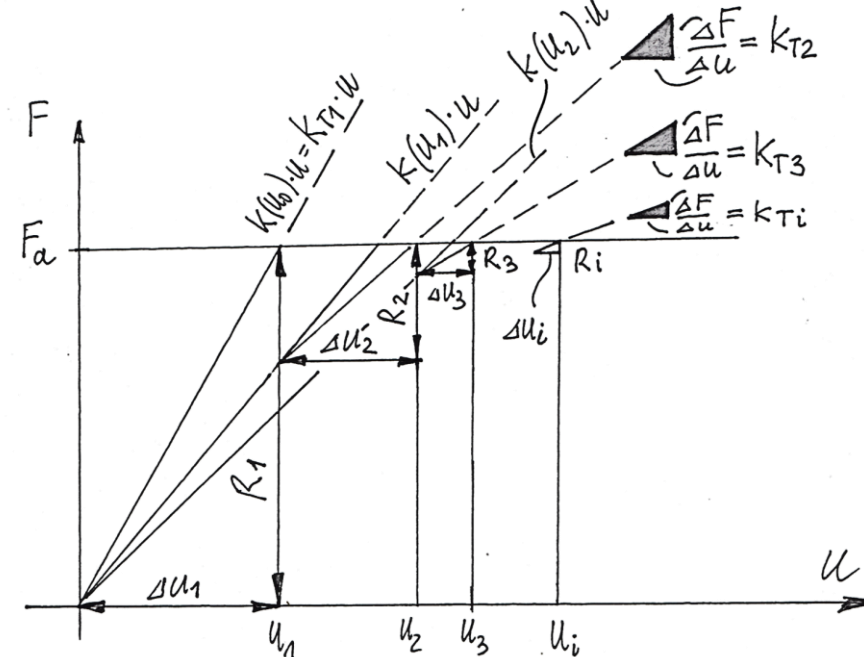
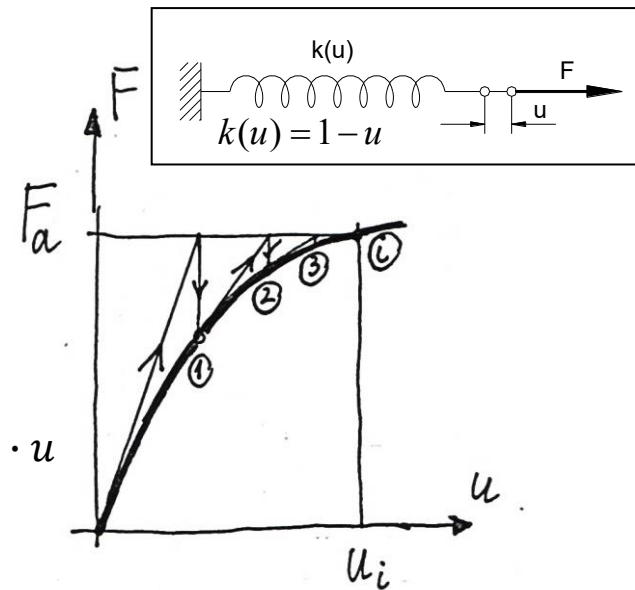
przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k_{T1}}$

przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”: $k_{Ti} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_{i-1}} = 1 - 2 \cdot u_{i-1}$

$$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{Ti}} \quad u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$



Kryteria zbieżności: $\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon$; $\frac{R_i}{F} \leq \delta$

Metoda Newtona-Raphsona

W każdej iteracji w obliczeniach liniowego układu równań używana jest macierz styczna

$$[K]_T = \frac{d\{F\}}{d\{q\}} = [K] + \frac{d[K]}{d\{q\}}\{q\}$$

Sztywność styczna:

$$k_T = \frac{dF}{du} = \frac{d(k(u)) \cdot u}{du} = \frac{d(k(u))}{du} \cdot u + \frac{du}{du} \cdot k(u) = -u + 1 - u = 1 - 2 \cdot u$$

Początkowe rozwiązanie: $u_0 = 0 \Rightarrow k(u_0) = 1 - 0 = 1$

Iteracja 1: $k_{T1} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_0} = 1 - 2 \cdot u_0$

Wektor residualny: $R_1 = F_a - k(u_0) \cdot u_0 = F_a$

przyrost przemieszczenia: $\Delta u_1 = \frac{R_1}{k_{T1}}$

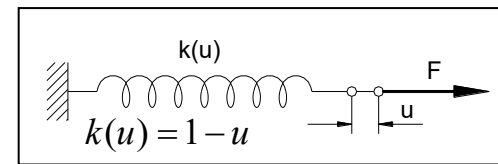
przemieszczenie: $u_1 = \Delta u_1 + u_0 = \Delta u_1$

Iteracja „i”: $k_{Ti} = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u_{i-1}} = 1 - 2 \cdot u_{i-1}$

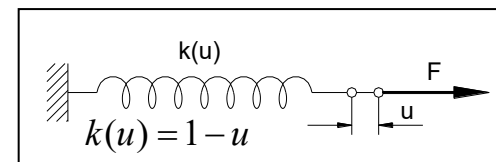
$$R_i = F_a - k(u_{i-1}) \cdot u_{i-1}$$

$$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{Ti}} \quad u_i = \Delta u_i + u_{i-1}$$

Kryteria zbieżności: $\frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$



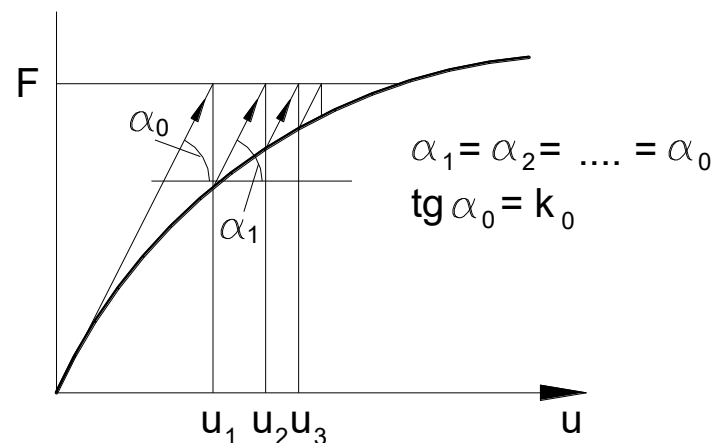
i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1} u_{i-1}$	$k_{Ti} = 1 - 2u_{i-1}$	$\Delta u_i = \frac{R_i}{k_{Ti}}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	1	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.6	0.0667	0.2667	0.250	0.2
3	0.2667	0.7333	0.0044	0.466	0.0095	0.2762	0.048	0.034
4	0.2762	0.7238	0.0001	0.448	0.0002	0.2764	0.001	0.0005



Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona

W każdej iteracji używany jest ten sam zestaw równań (ta sama macierz początkowa)

$$[K_0]^{-1} \text{ zamiast } [K]_{i-1}^{-1}$$

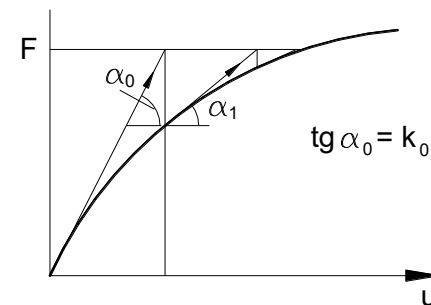
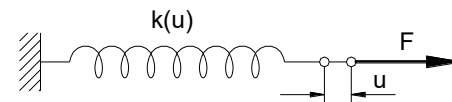


$$\text{Kryteria zbieżności: } \frac{\Delta u_i}{u_i} \leq \varepsilon ; \quad \frac{R_i}{F} \leq \delta$$

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_0$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.04	0.24	0.167	0.2
3	0.24	0.76	0.0176	0.0176	0.2576	0.068	0.088
4	0.2576	0.7424	0.0087	0.00876	0.2664	0.033	0.044
5	0.2664	0.7336	0.0046	0.0046	0.2710	0.017	0.023
6	0.2710	0.729	0.0024	0.0024	0.2734	0.009	0.012

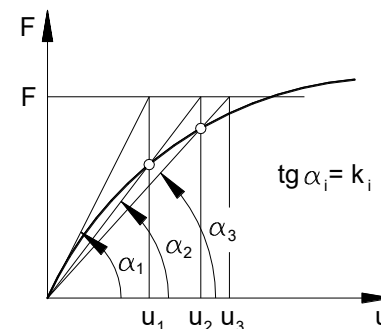
Metoda Newtona-Raphsona

i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$k_T = 1 - 2u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_T$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	1	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.6	0.0667	0.2667	0.250	0.2
3	0.2667	0.7333	0.0044	0.466	0.0095	0.2762	0.048	0.034
4	0.2762	0.7238	0.0001	0.448	0.0002	0.2764	0.001	0.0005



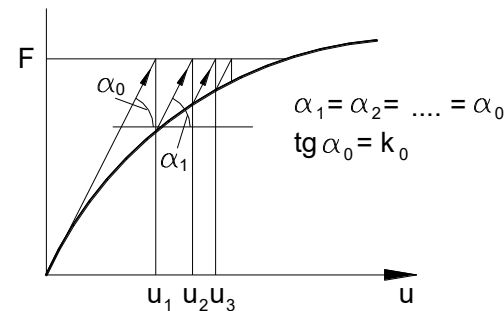
Procedura iteracji bezpośredniej (podejście przyrostowe)

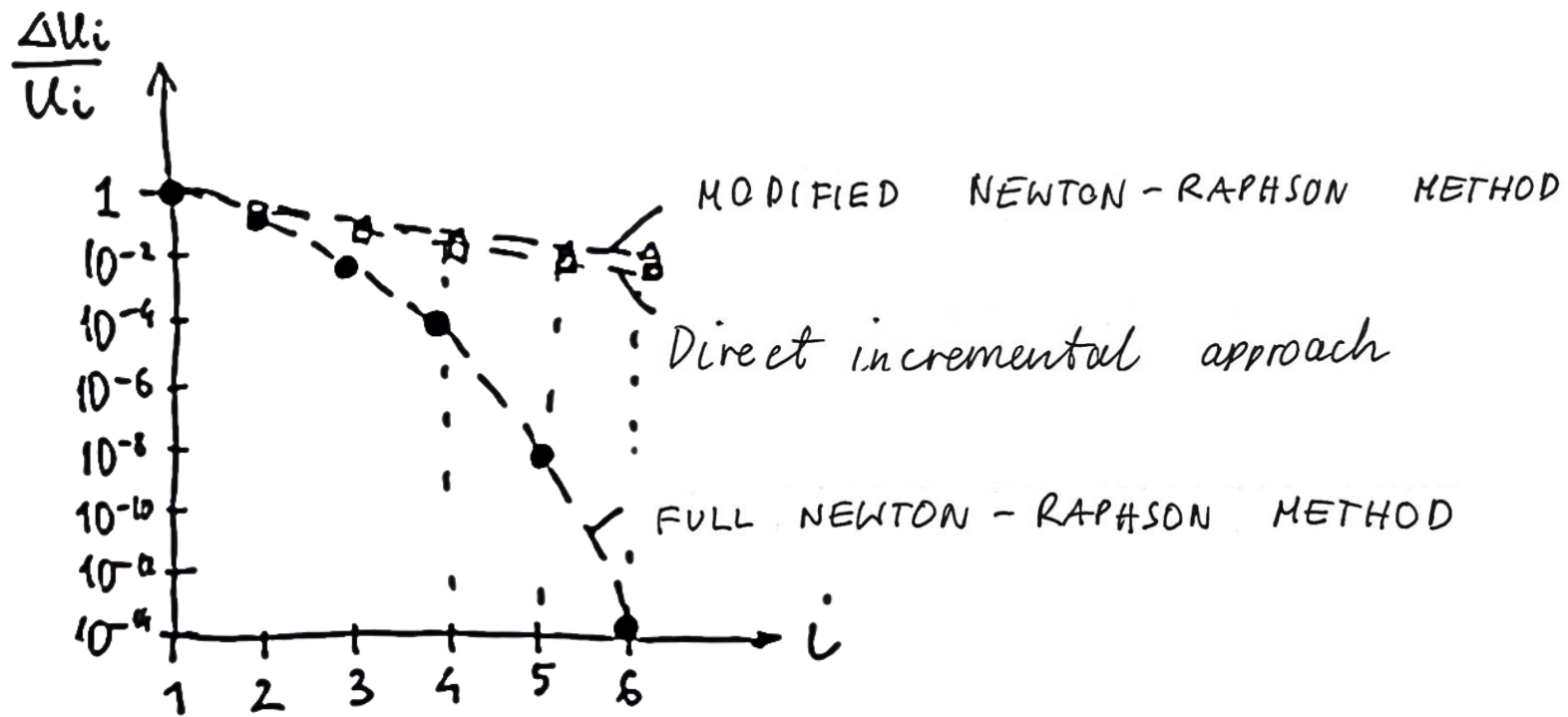
i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_{i-1}$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.05	0.25	0.2	0.2
3	0.25	0.75	0.0125	0.0167	0.2667	0.063	0.063
4	0.2667	0.733	0.0044	0.006	0.2727	0.022	0.022
5	0.2727	0.7273	0.0017	0.0023	0.2750	0.008	0.0085



Zmodyfikowana procedura Newtona-Raphsona

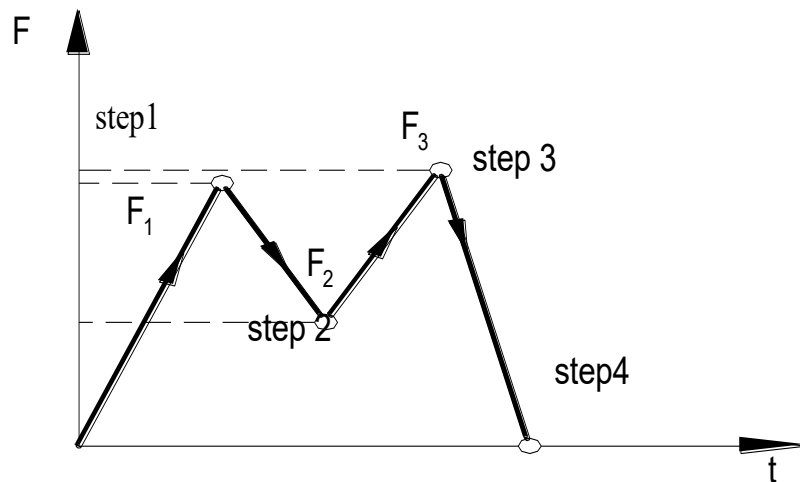
i	u_{i-1}	$k_{i-1} = 1 - u_{i-1}$	$R_i = F - k_{i-1}u_{i-1}$	$\Delta u_i = R_i / k_0$	$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$	$\frac{\Delta u_i}{u_i}$	$\frac{R_i}{F}$
1	0	1	0.2	0.2	0.2	1	1
2	0.2	0.8	0.04	0.04	0.24	0.167	0.2
3	0.24	0.76	0.0176	0.0176	0.2576	0.068	0.088
4	0.2576	0.7424	0.0087	0.00876	0.2664	0.033	0.044
5	0.2664	0.7336	0.0046	0.0046	0.2710	0.017	0.023
6	0.2710	0.729	0.0024	0.0024	0.2734	0.009	0.012



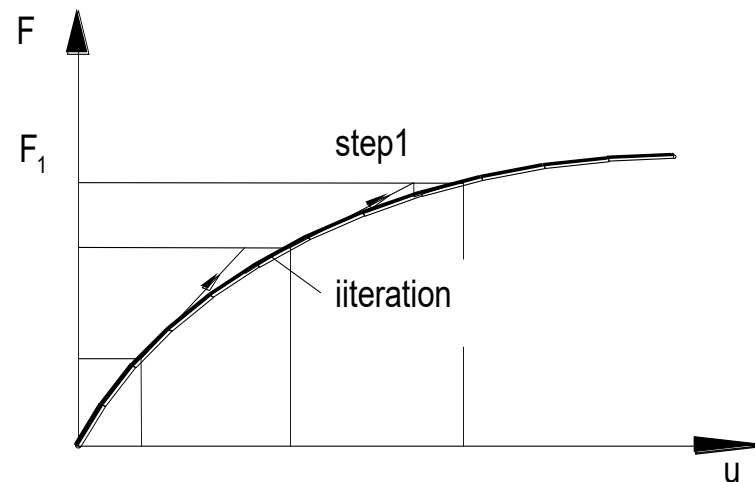


Iteracyjne obliczenia nieliniowe w praktyce

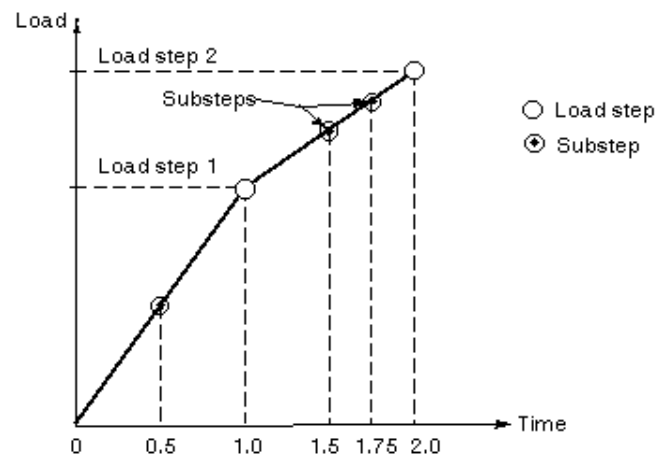
Użytkownik wykonuje nieliniową analizę statyczną, dzieląc obciążenie na szereg kroków przyrostowych obciążenia i w każdym kroku wykonując kolejne przybliżenia liniowe w celu uzyskania równowagi. Każde przybliżenie liniowe wymaga jednego przejścia przez solver równań (*iteracja równowagi*).



substep 3
substep 2
substep 1

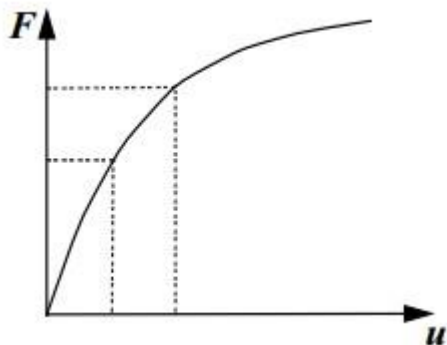


Load steps, substeps, and "time"



Nieliniowości geometryczne

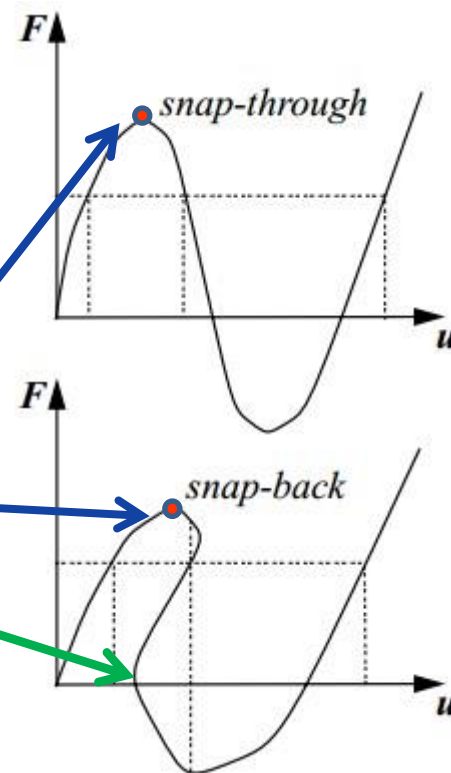
Nieliniowość – charakterystyka miękka



Silne nieliniowości ścieżki równowagi

punkty krytyczne

punkty zwrotne

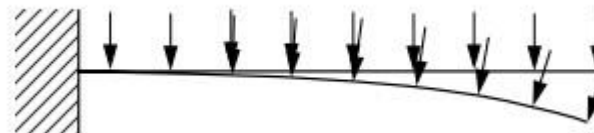
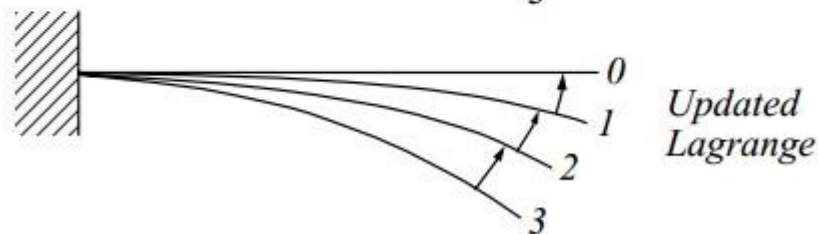
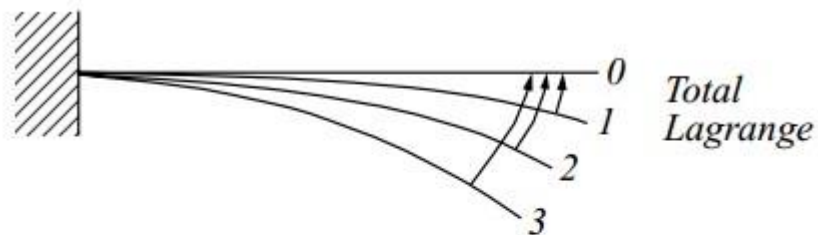


Nieliniowości geometryczne

TL – Total Lagrange
(stacjonarny opis Lagrange’a)

UL – Updated Lagrange
(uaktualniony opis Lagrange’a)

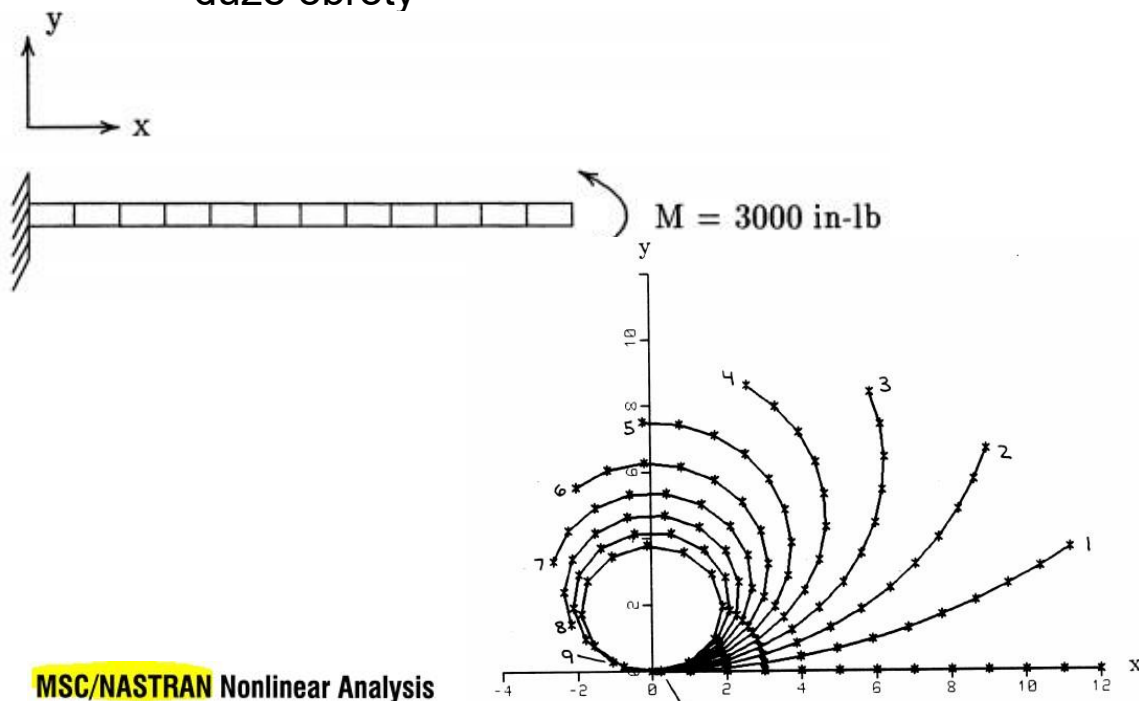
Siły śledzące – (np. ciśnienie)



Nieliniowości geometryczne

Nieliniowości geometryczne w MES – test NAFEMS NL5
Elementy belkowe

materiał sprężysty,
duże przemieszczenia
duże obroty



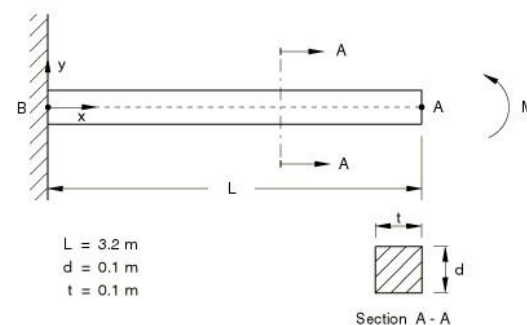
4.6.5 NL5: Straight cantilever with end moment

Product: Abaqus/Standard

Element tested

B22

Problem description



inc	moment (in-lb)	θ_{end}
1	300	36.7°
2	600	73.3°
3	900	110.0°
4	1200	146.7°
5	1500	183.3°
6	1800	220.0°
7	2100	256.6°
8	2400	293.3°
9	2700	330.0°
10	3000	366.6°